Parsial Diferensialasi

Parsial Diferensial

- Sebuah fungsi yg hanya mengandung satu variabel bebas hanya akan memiliki satu macam turunan Jika $y = f(x)$ maka turunan y terhadap x: $y' = dy/dx$
- Sedangkan jika fungsi yg bersangkutan memiliki lebih dari satu variabel bebas, maka turunannya akan lebih dari satu macam, tergantung jumlah variabel bebasnya

Contoh (2): Derivative Parsial

- Carilah turunan parsial terhadap x_1 dan x_2 dari fungsi $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$
  dengan menganggap x2 konstan, turunan terhadap x_1 adalah:
  $$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2$$
  turunan terhadap x_2:
  $$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 8x_2 + x_1$$

Derivatif dari Parsial Derivatif

- Sama seperti diferensial fungsi sederhana, derivatif fungsi majemuk juga dapat diturunkan kembali
- Jika $y = x^3 + 5z^2 - 4x^2z - 6xz^2 + 8z - 7$, maka turunan pertama y terhadap x dan z:

1 $$\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 8xz - 6z^2$$

2 $$\frac{\partial y}{\partial z} = 10z - 4x^2 - 12xz + 8$$

turunan ke-2:

1a $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x - 8z$$

2a $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 10 - 12x$$

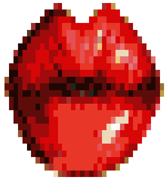
1b $$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -8x - 12z$$

2b $$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = -8x - 12z$$

Soal

1. Derivatif parsial dari $f(x,y) = 3x^4y^2 + xy^2 + 4y$.
2. Derivatif parsial dari Y= f (x1,x2)= $5X_1^2 + 4X_1X_2 + 3X_2^2$
3. Derivatif parsial dari Y= f (x1,x2)= $5X^3 - 12XY - 6Y^5$
4. Derifatif kedua dari $Z = X^3 - 9XY - 3Y^3$
5. Derifatif kedua dari $f(x,y) = 3x^4y2 + xy^2 + 4y$.
6. Derivatif parsial dari $y = 3x^2 - 5z^2 + 2x^2z – 4xz^2 - 9$
7. Derivatif parsial dari $y = 4x^2 - 6x^2z + 3xz^2 + 3z^2 + 5$

Thank you



Nilai Ekstrim

- Untuk y = f(x, z) maka y akan mencapai titik ekstrimnya jika (*necessary condition*):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

- Untuk mengetahui apakah titik ekstrim yg tercapai adalah maksimum atau minimum, maka (*sufficient condition*):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0 \Rightarrow \text{Maksimum}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Titik Ekstrim

- Carilah titik ekstrim dari fungsi:
  $y = -x^2 + 12x - z^2 + 10z - 45$
  selidikilah apakah titik ekstrim dari fungsi tersebut merupakan titik maksimum atau minimum!
  1) Titik ekstrim: y_x dan $y_z = 0$
     $$\frac{\partial y}{\partial x} = -2x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$
     $$\frac{\partial y}{\partial z} = -2z + 10 = 0 \Leftrightarrow z = 5$$
     $y = -(6)^2 + 12(6) - (5)^2 + 10(5) - 45 = 16$
     letak titik ekstrim adalah (6, 16, 5) → 3-dimensi

2) Jenis titik ekstrim: y_{xx} dan y_{zz} :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2 < 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -2 < 0$$

Maka titik ekstrim adalah titik maksimum dengan $y_{max} = 16$

Permintaan Marjinal

- Apabila 2 macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaannya, maka permintaan atas masing-masing barang akan fungsional terhadap harga kedua barang tersebut
- Jika $Qd_a = f(P_a, P_b)$ dan $Qd_b = f(P_a, P_b)$ maka:

$$\frac{\partial Qd_a}{\partial P_a} =$$ Permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_a

$$\frac{\partial Qd_b}{\partial P_a} =$$ Permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_a

$$\frac{\partial Qd_a}{\partial P_b} =$$ Permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_b

$$\frac{\partial Qd_b}{\partial P_b} =$$ Permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_b

Contoh:

Jika fungsi permintaan dua produk adalah

$Qx = 17 - 2Px - Py$ dan $Qy = 14 - Px - 2Py$

Maka fungsi permintaan marginalnya adalah

$\partial Qx / \partial Px = -2 < 0$; $\partial Qx / \partial Py = -1 < 0$

$\partial Qy / \partial Px = -1 < 0$; $\partial Qy / \partial Py = -2 < 0$

Jika $\partial Qx / \partial Py$ dan $\partial Qy / \partial Px$ adl negatif

Barang bersifat complementer

Jika $\partial Qx / \partial Py$ dan $\partial Qy / \partial Px$ adl positif

Barang bersifat subtitusi.

Kesimpulannya merupakan barang komplementer

Elastisitas Permintaan Parsial

- Elastisitas permintaan (*price elasticity of demand*)

  Jika $Qd_a = f(P_a, P_b)$ dan $Qd_b = f(P_a, P_b)$, maka elastisitas permintaan atas perubahan harga barang itu sendiri:

  1) Barang a

  $$\eta d_a = \frac{\%\Delta Qd_a}{\%\Delta P_a} = \frac{\partial Qd_a}{\partial P_a} \times \frac{P_a}{Qd_a}$$

  2) Barang b

  $$\eta d_b = \frac{\%\Delta Qd_b}{\%\Delta P_b} = \frac{\partial Qd_b}{\partial P_b} \times \frac{P_b}{Qd_b}$$

Elastisitas Silang

- Elastisitas Silang (*cross elasticity of demand*)

Jika $Qd_a = f(P_a, P_b)$ dan $Qd_b = f(P_a, P_b)$, maka elastisitas silang yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan dengan perubahan harga barang lainnya:

1) Elastisitas silang barang a dengan barang b

$$\eta_{ab} = \frac{\%\Delta Qd_a}{\%\Delta P_b} = \frac{\partial Qd_a}{\partial P_b} \times \frac{P_b}{Qd_a}$$

2) Elastisitas silang barang b dengan barang a

$$\eta_{ba} = \frac{\%\Delta Qd_b}{\%\Delta P_a} = \frac{\partial Qd_b}{\partial P_a} \times \frac{P_a}{Qd_b}$$

Elastisitas Silang

- Elastisitas Silang (*cross elasticity of demand*)
  - Jika η_{ab} dan η_{ba} < 0 untuk P_a dan P_b tertentu, maka hubungan antara barang a dan barang b adalah saling melengkapi (**komplementer**); karena kenaikan harga salah satu barang akan diikuti penurunan permintaan atas keduanya
  - Jika η_{ab} dan η_{ba} > 0 untuk P_a dan P_b tertentu, maka hubungan antara barang a dan barang b adalah saling menggantikan (**substitusi**); karena kenaikan harga salah satu barang akan diikuti kenaikan permintaan barang lainnya

Elastisitas 2 Barang

- Fungsi permintaan atas 2 barang ditunjukkan sbb:

  $Qd_a(P_a^2)(P_b^3) - 1 = 0$

  $Qd_b(P_a^3)(P_b) - 1 = 0$

  Hitunglah elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimanakah hubungan antara kedua barang tersebut?

$Qd_a(P_a^2)(P_b^3) - 1 = 0$

$Qd_a(P_a^2)(P_b^3) = 1$

$Qd_a = 1 / (P_a^2)(P_b^3)$

$= P_a^{-2} P_b^{-3}$

$Qd_b(P_a^3)(P_b) - 1 = 0$

$Qd_b(P_a^3)(P_b) = 1$

$Qd_b = 1 / (P_a^3)(P_b)$

$= P_a^{-3} P_b^{-1}$

1) Elastisitas permintaan:
cari Qd_a' dan Qd_b':

$$\frac{\partial Qd_a}{\partial P_a} = -2P_a^{-3}P_b^{-3} \qquad \frac{\partial Qd_b}{\partial P_b} = -P_a^{-3}P_b^{-2}$$

bentuk persamaan elastisitas permintaannya:

$$\eta d_a = \frac{\partial Qd_a}{\partial P_a} \times \frac{P_a}{Qd_a} = -2P_a^{-3}P_b^{-3} \times \frac{P_a}{P_a^{-2}P_b^{-3}} = -2$$

$$\eta d_b = \frac{\partial Qd_b}{\partial P_b} \times \frac{P_b}{Qd_b} = -P_a^{-3}P_b^{-2} \times \frac{P_b}{P_a^{-3}P_b^{-1}} = -1$$

Barang a: elastis, barang b: elastis-uniter

2) Elastisitas silang:

cari turunan pertama atas a dan b:

$$\frac{\partial Qd_a}{\partial P_b} = -3P_a^{-2}P_b^{-4} \qquad \frac{\partial Qd_b}{\partial P_a} = -3P_a^{-4}P_b^{-1}$$

bentuk persamaan elastisitas silangnya:

$$\eta_{ab} = \frac{\partial Qd_a}{\partial P_b} \times \frac{P_b}{Qd_a} = -3P_a^{-2}P_b^{-4} \times \frac{P_b}{P_a^{-2}P_b^{-3}} = -3$$

$$\eta_{ba} = \frac{\partial Qd_b}{\partial P_a} \times \frac{P_a}{Qd_b} = -3P_a^{-4}P_b^{-1} \times \frac{P_a}{P_a^{-3}P_b^{-1}} = -3$$

Hubungan kedua barang adalah komplementer

Fungsi Biaya Gabungan

- Andaikan sebuah perusahaan memproduksi 2 barang A dan B, dimana fungsi permintaan atas kedua barang dicerminkan oleh Q_A dan Q_B sedangkan fungsi biaya $C = f(Q_A, Q_B)$
  maka:
  Penerimaan dari barang A: $R_A = Q_A \times P_A = f(Q_A)$
  Penerimaan dari barang B: $R_B = Q_B \times P_B = f(Q_B)$
  Penerimaan total: $R = R_A + R_B = f(Q_A) + f(Q_B)$
- Fungsi keuntungannya:
  $\Pi = R - C = [f(Q_A) + f(Q_B)] - f(Q_A, Q_B) = g(Q_A, Q_B)$

Fungsi Biaya Gabungan

- Keuntungan akan optimum ketika Π’ = 0:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_A} = 0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial Q_B} = 0$$

- Titik optimum adalah maksimum jika Π” < 0:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_A^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_B^2} < 0$$

Fungsi Biaya Gabungan

- Biaya total yg dikeluarkan sebuah perusahaan yg memproduksi dua barang, X dan Y, adalah:

  $C = Q_X^2 + 3Q_Y^2 + Q_XQ_Y$

  Harga jual per unit masing-masing barang adalah $P_X = 7$ dan $P_Y = 20$
- Berapa unit tiap barang harus diproduksi agar keuntungan maksimum?
- Berapakah besarnya keuntungan maksimum?

Fungsi Biaya Gabungan

Berapa unit tiap barang harus diproduksi agar keuntungan maksimum?

$R_X = P_X Q_X = 7Q_X$ $R_Y = P_Y Q_Y = 20Q_Y$

$R = 7Q_X + 20Q_Y$

$\Pi = 7Q_X + 20Q_Y - Q_X^2 - 3Q_Y^2 - Q_X Q_Y$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_X} = 7 - 2Q_X - Q_Y = 0 \quad \textbf{X1}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_Y} = 20 - Q_X - 6Qy = 0 \quad \textbf{X2}$$

$Q_Y = 3 \rightarrow 20 - 6(3) - Q_X = 0 \rightarrow Q_X = 2$

Fungsi Biaya Gabungan

Jika Π_{XX} dan $\Pi_{YY} < 0$ maka titik maksimum:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_X^2} = -2 < 0 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_Y^2} = -6 < 0$$

- Besarnya keuntungan maksimum:

  $\Pi = 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2)(3)$

  $\Pi = 37$

- Soal ini juga dapat diselesaikan melalui persamaan marjinalnya, Π akan maksimum ketika MR = MC:

  $MR_X = MC_X$ dan $MR_Y = MC_Y$

SOAL

1. Selidikilah apakah titik ekstrim dari fungsi berikut ini adalah titik maksimum atau titik minimum $p = 3q^2 - 18q + r^2 - 8r + 50$
2. Selidikilah apakah titik ekstrim dari fungsi berikut ini adalah titik maksimum atau titik minimum $Z = f(X,Y) = 60X+34Y-4XY-6X^2-3Y^2+5$
3. Jika fungsi permintaan dua produk adalah $Qx = 5 - 2Px + Py$ dan $Qy = 6 + Px - Py$. Maka fungsi permintaan marginalnya adalah
4. Jika fungsi permintaan produk x dan Y adalah $Px = 36-3Qx$ dan $Py=40 - 5Qy$ dan fungsi biaya bersama $TC = Qx^2 + 2QxQy + 3\,Qy^2$. Tentukanlah jumlah dan harga yang memaksimumkan laba dan carilah maksimum laba tersebut?

JAWAB

1. $12x^3y^2+y2$ $6x^4y+2xy+4$
2. $f1 =10X_1+4X_2$ $f2=4X_1+6X_2$
3. $Zx = 15x^2-12Y$ $Zy = -12X-30Y^4$
4. $Zx = 3x^2-9Y$ $Zy=-9X-9y^2$
   $Zxx = 6x$ $zyy=-18Y$ $Zxy=-9$ $Zyx=-9$
5. $36x^2y^2$ $6x^4 + 2x$
   $24x^3y + 2y$ $24x^3y + 2y$
6. $6x + 4xz - 4z^2$ $-10z + 2x^2 - 8x$
7. $8x-12xz+3z^2$
   $-6x^2+6xz+6z$

JAWAB

1. $Fq' = 6q - 18$

   $Fr' = 2r - 8$

   $6q - 18 = 0$

   $q = 3$

   $2r - 8 = 0$

   $r = 4$

   $p = 3(3)^2 - 18(3) + 4^2 - 8(4) + 50$

   $p = 27 - 54 + 16 - 32 + 50$

   $p = 7$

   $Fq'' = 6 > 0$

   $Fr'' = 2 > 0$

   Karena Fq” dan Fr” > 0, titik ekstrimnya adalah titik minimum dengan $P_{min} = 7$

2. Titik Extrim X=4 dan Y= 3

Z Max = 176

3. $\partial Qx / \partial Px = -2 < 0$; $\partial Qx / \partial Py = 1 > 0$

$\partial Qy / \partial Px = 1 > 0$; $\partial Qy / \partial Py = -1 < 0$

Sama sama 1 jadi bersifat substitusi

4. Qx=4;Qy=2 ; Px=24 ; Py=30

Laba Maks =112

5. 1,7 ; 0,8 ; 0,5 ; -0,2